

УДК 621.891(048):539.178(048)

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ ТЕЛ

А.А. Максименко, Н.В. Котенева

Алтайский государственный технический университет, г. Барнаул

E-mail: sle@agtu.secn.ru

Рассматривается динамическая модель внедрения жесткой гладкой сферы в однородное упругопластическое упрочняемое твердое тело. На основе модели предложены численно-аналитические зависимости, описывающие поведение твердого тела в упругопластической области контактного взаимодействия. Предложенные численно-аналитические зависимости позволяют учесть дополнительное сближение контактирующих тел за счет динамического нагружения.

Запросы современной техники, связанные с созданием конструкций, обладающих прочностной надежностью при малой материалоемкости, приводят к необходимости разработки оптимальных расчетов на прочность с учетом контактных деформаций. На базе уточнения физических и механических представлений о механизмах разрушения твердых тел был сформулирован в течение последних трех десятилетий раздел механики деформируемого твердого тела, получивший название механики разрушения.

Создание механики разрушения позволило с совершенно новых позиций взглянуть на процессы контактного взаимодействия твердых тел. Известно, что при контактном взаимодействии твердых тел характерна геометрическая локализация (в области под контактом) всех видов деформации (упругой и пластической) и разрушение. Являясь сначала локальным, разрушение затем может развиваться катастрофически и привести к поломке образца или конкретной детали. В настоящее время считается общепризнанным, что более 80 % случаев выхода из строя машин, механизмов и устройств обусловлено процессами, происходящими в зоне контакта соприкасающихся твердых тел. Исследования в этом направлении связаны, также как и в испытаниях на твердость, с изучением поведения поверхностных слоев материала при вдавлении одного тела (индентора) в другое. Испытания на твердость дают большую информацию о механических свойствах материала, и в изучении этого явления достигнут значительных успехов. Исследованиям же механики контактного разрушения уделялось незаслуженно малое внимание, что, по-видимому, объясняется сложностью процессов образования и роста поверхностных трещин и отсутствием в свое время соответствующих теоретических методов анализа. Однако изучение контактного разрушения имеет большое научное и практическое значение.

Наиболее хорошо изученным и часто используемым в практических применениях является случай контакта сферического индентора радиуса  $R$  с упругим полупространством под действием статической силы  $P$ , так называемый герцевский контакт или герцевское нагружение (рис. 1).

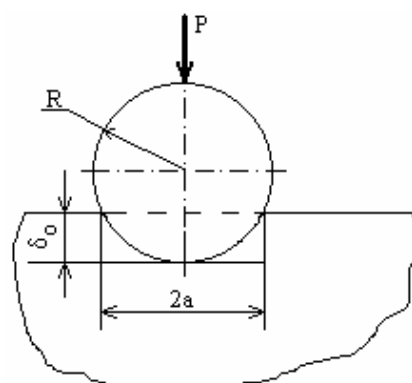


Рис. 1. Внедрение сферического индентора в упругое полупространство (контакт Герца)

В соответствии с теорией Герца сближение тел  $\delta_0$  является степенной функцией контактной нагрузки  $P$  [1], т. е.

$$\delta_0 = kP^{2/3},$$

где  $k = 2 \frac{(1-\mu^2)}{E}$ ,  $E$ ,  $\mu$  — упругая постоянная, нормальный модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно.

С возрастанием контактной нагрузки  $P$  впервые возникает пластическая деформация, которая затем постепенно распространяется как на глубину, так и к поверхности контртела. При некоторой величине нагрузки на поверхности контртела зависимость Герца нарушается. После снятия нагрузки происходит упругое восстановление материала контртела и общее сближение, уменьшившись на величину  $\delta_y$  контртела, становится равной  $\delta_{el}$  (рис. 2).

С появлением на поверхности контакта остаточной вмятины упругие деформации продолжают, как известно, подчиняться зависимостям теории упругости, однако, очевидно, что при этом обычные «упругие» формулы должны быть скорректированы в соответствии с новыми условиями контакта. Принципиальное отличие этих условий от условий чисто упругого контакта тел состоит в том, что при наличии остаточной вмятины сфера радиусом  $R$  находится в контакте не в точке, а с поверхностью остаточной вмятины, радиус кривизны которой равен  $R_1$  (рис. 2).

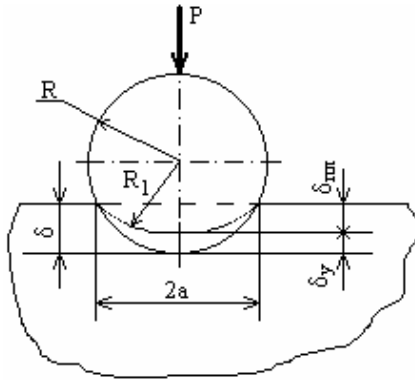


Рис. 2. Схема внедрения жесткого шара в плоскую границу упругопластического контртела

Для определения величины  $R_1$  примем следующие допущения:

- 1) со снятием нагрузки сферический контур отпечатка не изменяется;
- 2) профиль вмятины под нагрузкой и после разгрузки в плоскостях ее главных кривизн очерчен окружностью радиусом  $R_1$ ;
- 3) поверхность контртела вне контакта не деформируется.

С учетом вышесказанного поправка к формуле Герца, учитывающая влияние пластической деформации контртела в зоне контакта на величину упругого сближения, может быть рассчитана по формуле [2]:

$$\Omega = \left( 1 + \frac{\delta_{nl}}{\delta_y} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

где  $\delta_y$  — упругая составляющая полного сближения;  $\delta_{nl}$  — пластическая составляющая полного сближения.

Окончательно имеем

$$\delta_y = \frac{\delta_0}{\Omega},$$

или с учетом формулы (1)

$$\delta_y = k^{3/2} (P\pi RH)^{1/2}, \quad (2)$$

Сближение, соответствующее зарождению и наличию пластической деформации можно рассчитать по формуле [3]:

$$\delta_{nl} = \frac{P}{2\pi RH}, \quad (3)$$

Полное сближение в упругопластическом контакте сферы с контртелом состоит из двух слагаемых, остаточного сближения  $\delta_{nl}$ , равного глубине остаточного отпечатка, и упругого сближения  $\delta_y$ , исчезающего со снятием нагрузки вследствие упругого восстановления контртела. Таким образом,

$$\delta = \delta_y + \delta_{nl}. \quad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) значения упругого и остаточного сближений из формул (2) и (3) соответственно получаем:

$$\delta = \alpha P + \beta (\gamma P)^{1/2}, \quad (5)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2\pi RH}$ ;  $\beta = k^{3/2}$ ;  $\gamma = \pi RH$ .

Приведенные выше формулы позволяют рассчитать полное сближение в упругопластическом контакте при статическом нагружении. В ряде случаев контактирование твердых тел происходит при динамическом, в частности ударном, нагружении. Динамичность нагружения характеризуется либо скоростью удара или скоростью деформации, либо скоростью напряжения, которая зависит от скорости приложения нагрузки. При упругопластическом контактировании материалов в условиях динамического нагружения появляется дополнительное сближение, что может привести к изменению механических свойств поверхности. Упругий контакт при первоначальном соударении твердых тел осуществляется редко, особенно для металлов. Анализ напряженного состояния материала при динамическом упругопластическом внедрении в него жестких инденторов представляет собой очень сложную задачу, и исследования в этом направлении еще продолжаются. Отсутствие общих методов построения тонких решений нелинейных задач динамики приводит к необходимости разработки эффективных приближенных численно-аналитических методов.

Во многих механических системах движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Рассматриваемая в работе модель контактного взаимодействия является нелинейной, поэтому дифференциальное уравнение движения в условиях свободных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x} + P(x) = 0,$$

где  $x = \delta$ , а  $P(x)$  выражается из формулы (5). С учетом сказанного дифференциальное уравнение движения жесткой, гладкой сферы по упругопластическому полупространству при ударе будет иметь вид:

$$m\ddot{x} + a_1 \sqrt{x} + a_2 x = 0,$$

где  $a_1 = -\frac{\beta \gamma^{1/2}}{\alpha^{3/2}}$ ;  $a_2 = \frac{1}{\alpha}$ .

Считая, что в начальный момент соударения  $\frac{dx}{dt} = v_0$ , после первого интегрирования можно найти скорость сближения в виде

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \left( \frac{4a_1 x^{3/2}}{3m} + \frac{a_2 x^2}{m} \right)}. \quad (6)$$

Наибольшего значения величина сближения достигается в тот момент, когда  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Решая уравнение (6) можно рассчитать величину динамического сближения, максимальную силу удара и максимальное давление в центре контакта. Для вычисления продолжительности удара производится разделение переменных в уравнении (6), а затем интегрирование от начала удара до момента максимального сближения

$$t = \pm \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \left( \frac{4a_1 x^{3/2}}{3m} + \frac{a_2 x^2}{m} \right)}}. \quad (7)$$

Решая данную зависимость и аппроксимируя полученное решение, можно построить зависимости  $x(t)$  и  $P(t)$  в любой момент времени процесса соударения.

Если принять значение начальной скорости равным нулю ( $v_0=0$ ), то можно рассчитать статическое упругопластическое значение сближения. Решение имеет вид:

$$x = \left( \frac{2a_1}{3a_2} \left[ \sin \left( \frac{t\sqrt{a_2}}{2\sqrt{m}} - \frac{\pi}{2} \right) + 1 \right] \right)^2. \quad (8)$$

Значения, рассчитанные по формуле (8), аналогичны значениям, рассчитанным по формуле (5).

В заключение следует отметить, что данный численно-аналитический метод дает возможность рассчитать параметры контактной жесткости и прочности как в условиях статического, так и динамического нагружения. Использование этого алгоритма расчета позволит дать оценку влияния упругопластических деформаций на контактную прочность для случая удара жесткого гладкого шара о гладкое упругопластическое полупространство. Предлагаемый численно-аналитический метод расчета может быть использован и для расчета упругопластического контактного взаимодействия шероховатых тел. Для этого в формуле (5) необходимо учесть параметры микрогеометрии контактирующих тел.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 567 с.
2. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидякин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. — М.: Машиностроение, 1986. — 220 с.
3. Котенева Н.В. Упругопластический контакт гладкой сферы с плоской поверхностью при динамическом нагружении // Известия Томского политехнического университета. — 2005. — Т. 308. — № 2. — С. 114–116.

Поступила 31.10.2006 г.

УДК 533.6.011.5:532.582.3

## ПРОСТРАНСТВЕННАЯ АЭРОДИНАМИКА ЗАТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЛОЖНЯЮЩИХ ФАКТОРОВ В НАБЕГАЮЩЕМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ф.М. Пахомов

Томский государственный университет  
E-mail: fire19952004@mail.ru

*Приведены результаты решения задач взаимодействия затупленного конуса со сферической нагретой областью в набегающем под ненулевым углом атаки сверхзвуковом потоке в отсутствие и при наличии сильного локализованного вдува с поверхности, а также с падающей под углом атаки плоской ударной волной.*

Задачи взаимодействия быстролетящего тела с рассматриваемыми нагретыми областями носят очевидный практический интерес. В [1] задача взаимодействия сферы с локальными неоднородностями различной формы решена в осесимметричной постановке. В [2] рассмотрен случай, когда центр сферической нагретой области смещен относительно оси симметрии тела. В [3] приведены результаты начального этапа входа затупленного конуса в плоскую нагретую область под углом атаки.

Нестационарная задача взаимодействия ударной волны в набегающем сверхзвуковом потоке с летательным аппаратом носит исключительно важный практический интерес с точки зрения изменения его аэродинамических характеристик. В осесимметричном случае, на примере обтекания полусферы, она решена в [4]. В данной работе рассмо-

трен случай взаимодействия ударной волны с затупленным по сфере конусом (моделью спускаемого космического аппарата) при наличии угла атаки.

Целью данной работы является исследование аэродинамических характеристик затупленных конусов при взаимодействии с локальными нагретыми областями при сверхзвуковом движении под ненулевым углом атаки и при взаимодействии с падающей плоской ударной волной.

Математическая постановка задачи, основанная на системе уравнений Эйлера с соответствующими начальными и граничными условиями, приведена в [2]. Как и в [2], для решения использовалась явная конечно-разностная схема С.К. Годунова первого порядка точности [5], вполне достаточного для определения интегральных аэродинамических характеристик.